BULETINUL Universităţii Petrol – Gaze din Ploieşti	Vol. LVIII No. 1/2006	7 - 14	Seria Matematică - Informatică - Fizică

Ensembles demi-préouverts dans les espaces topologiques flous

Mihai Brescan

Universitatea Petrol-Gaze din Ploieşti, Bd. Bucureşti 39, Ploieşti, Catedra de Matematică
e-mail: mate@upg-ploiesti.ro

Résumé

Dans ce travail on généralise pour les espaces topologiques flous la notion d'ensemble demi-préouvert introduit dans la topologie classique par D. ANDRIJEVIĆ[1]. Nous définissons ici les opérateurs flous demi-préfermeture et demi-préintérieur et puis on établit des relations importantes avec les opérateurs F-demi-fermeture et F-demi-intérieur introduits par nous dans le travail [3]

Keywords: *espace topologique flou (e. t. f.), ensemble demi-ouvert, ensemble demi-préouvert*

Introduction

Soit X un ensemble non-vide arbitraire et $J = [0,1] \subset IR$.

Un ensemble flou en X est une application $\lambda : X \to [0,1]$. On va noter par $\mathcal{F}(X)$ la classe des ensembles flous de l'espace $X \cdot$ L'espace X sera identifié à la fonction constante 1 et l'ensemble vide ϕ à la function constante 0. Soit I un ensemble indexé et soit $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ une famille d'ensembles flous en X.

La réunion et l'intersection de cette famille, notées par $\bigcup_{i\in I} \lambda_i$, respectivement $\bigcap_{i\in I} \lambda_i$, sont définies de la manière suivante ([2]):

$$\bigcup_{i\in I} \lambda_i \text{ par } \left(\bigcup_{i\in I} \lambda_i\right)(x) = \sup\{\lambda_i(x) : i \in I\}, (\forall) x \in X;$$

$$\bigcup_{i\in I} \lambda_i \text{ par } \left(\bigcup_{i\in I} \lambda_i\right)(x) = \inf\{\lambda_i(x) : i \in I\}, (\forall) x \in X.$$

Évidemment, les définitions sont aussi valables pour le cas fini $I = \{1,2,...,n\}$, mais les notations sont $\bigcup_{i=1}^{n} \lambda_i$, respectivement $\bigcup_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\sup = \max, \inf = \min$. L'inclusion, notée par $\lambda_1 \le \lambda_2$ ou $\lambda_1 \le \lambda_2$, est définie par

$$\lambda_1(x) \le \lambda_2(x), (\forall) x \in X \text{ ou } \lambda_2(x) \ge \lambda_1(x), (\forall) x \in X .$$

La complémentaire de $\lambda \in \mathcal{F}(x)$, notée par λ^c, est définie par

$$\lambda^c = 1 - \lambda,\ \lambda^c(x) = (1-\lambda)(x) = 1 - \lambda(x),\ (\forall)x \in X.$$

Définition 1 ([5]). La famille $\tau \subseteq \mathcal{F}(x)$ s'appelle une topologie floue X si elle satisfait les conditions suivantes:

$$(\mathrm{T}_1)\ 0{,}1 \in X;$$

$$(\mathrm{T}_2)\ \delta_i \in \tau,\ i = \overline{1,n} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \delta_i \in \tau;$$

$$(\mathrm{T}_3)\{\delta_i\}_{i\in I} \subset \tau \Rightarrow \bigcup_{i=I} \delta_i \in \tau.$$

Le couple (X,τ) s'appelle espace topologique flou (au sens CHANG), ou, en abrégé e.t.f.

Les éléments de τ sont appellés ensembles flous τ-ouverts et la complémentaire d'un ensemble flou τ-ouvert s'appelle ensemble flou τ-fermé.

Définition 2 ([5]). L'intérieur et la fermeture d'un ensemble flou $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ sont définis par

$$Int\lambda = \overset{o}{\lambda} = \cup\{\delta | \delta \le \lambda, \delta \in \tau\} = \sup\{\delta | \delta \le, \delta \in \tau\}$$

respectivement

$$C\ell\lambda = \overline{\lambda} = \cap\{\delta | \delta \ge \lambda, \delta^c \in \tau\}$$

Soit (X,τ) un e.t.f.

Définition 3 ([2]). L'ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ s'appelle demi-ouvert s'il y a un ensemble $\delta \in \tau$ ainsi que $\delta \le \lambda \le \overline{\delta}$.

La complémentaire d'un ensemble demi-ouvert s'appelle ensemble demi-fermé.

Théorème 1 ([2]). Soit (X,τ) un e. t. f. Les affirmations suivantes sont equivalentes:

(a) $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ est un ensemble demi-fermé;

(b) il y a $\mu \in \mathcal{F}(X)$ avec $\mu^c \in \tau$ ainsi que $\overset{o}{\mu} \le \lambda \le \mu$;

(c) $\overset{o}{\overline{\lambda}} \le \lambda$;

(d) $\overline{\overset{o}{\overline{\lambda^c}}} \ge \lambda^c$.

Définition 4 ([2]). Un ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(X)$, où (X,τ) est e. t. f. s'appelle régulièrement ouvert (respectivement régulièrement fermé) si $\lambda = \mathrm{int}\,\overline{\lambda}$ (resp. $\lambda = \overline{Int\lambda}$).

Remarque 1. La complémentaire d'un ensemble flou régulièrement ouvert est un ensemble flou régulièrement fermé.

Définition 5 ([4]). Un ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ s'appelle préouvert si $\lambda \le Int\overline{\lambda}$, ou, avec autre notation $\lambda \le \overset{o}{\overline{\lambda}}$.

La complémentaire d'un ensemble préouvert s'appelle préfermé.

Définition 6 ([4]). Soit (X,τ) e.t.f. et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$

(a) L'intersection de tous les ensembles préfermés contenant λ s'appelle la préfermeture de λ et on va la noter par $pC\ell\lambda$ ou $p\overline{\lambda}$.

Nous avons donc $pC\ell\lambda = p\overline{\lambda} = \inf\{\mu : \lambda \le \mu, \mu \text{ preferme}\}$.

(b) La réunion de tous les ensembles préouverts qui sont sous-ensembles de λ s'appelle le préintérieur de λ et on va le noter par $p\,Int\,\lambda$ ou $p\overset{o}{\lambda}$. C'est à dire

$$p\,Int\,\lambda = p\overset{o}{\lambda} = \sup\{\nu : \nu \le \lambda, \nu \text{ preouvert}\}.$$

Définition 7 ([3]). Soit (X,τ) e.t.f. et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$

a) La demi-fermeture de λ est l'intersection de tous les ensembles flous demi-fermés contenant λ et on va la noter par $dc\ell\lambda$ ou $\underline{\lambda}$. Nous avons donc

$$dC\ell\lambda = \underline{\lambda} = \inf\{\mu : \lambda \le \mu, \mu\, demi-ferme\};$$

b) Le demi-intérieur de λ est la réunion de tous les ensembles flous demi-ouverts qui sont sous-ensembles de λ et on va le noter par $d\,Int\,\lambda$ ou λ_0.

Nous avons donc $d\,Int\,\lambda = \lambda_0 = \sup\{\nu : \nu \le \lambda, \nu\ demi-ouvert\}$.

Pour continuer nous utiliserons les cas suivants :

Lemme 1. Soit (X,τ) e.t.f. et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$. Alors:

(a) $\overline{\lambda} \cap \delta \le \overline{\lambda \cap \delta}(\forall)\delta \in \tau$;
(b) $Int(\lambda \cup \sigma) \le (Int\lambda) \cup \sigma (\forall)\sigma, \tau -$ fermé.

Théorème 2 ([3]). Soit (X,τ) e.t.f. et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$. Alors les affirmations suivantes sont equivalentes:

(a) λ est demi-ouvert;

(b) $\lambda \le \overline{\overset{o}{\lambda}}$, ou, autre notation $\lambda \le \overline{Int\lambda}$

(c) $\overline{\lambda} = \overline{\overset{o}{\lambda}}$ ou $\overline{\lambda} = \overline{Int\lambda}$.

Théorème 3 ([3]). Soit (X,τ) e.t.f. et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$. Alors les affirmations suivantes sont equivalentes:

(a) λ est demi-fermé;

(b) $\overset{o}{\overline{\lambda}} \le \lambda$ ou $Int\overline{\lambda} \le \lambda$;

(c) $\overset{o}{\overline{\lambda}} \le \overset{o}{\lambda}$ ou $Int\overline{\lambda} = Int\lambda$.
Il s'en suit immédiatement:

Théorème 4. Dans e.t.f. (X,τ), $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ est préfermé si et seulement si $Int\overline{\lambda} \le \lambda$.

Théorème 5. Soit (X,τ) e.t.f. et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$. Alors:

(a) $dC\ell = \lambda \cup Int\lambda$ ou, avec autre notation $\underline{\lambda} = \lambda \cup \overset{o}{\overline{\lambda}}$;

(b) $dInt\lambda = \lambda \cap \overline{Int\lambda}$ ou $\lambda_0 = \overline{\overset{o}{\lambda}}$;

(c) $Int\lambda = \lambda \cap Int(\overline{Int\lambda})$ ou $\overset{o}{\lambda} = \lambda \cap \overset{\overset{o}{-}}{\overset{o}{\lambda}}$;

(d) $pC\ell\lambda = \lambda \cup \overline{Int\lambda}$ ou $p\overline{\lambda} = \lambda \cup \overset{\overset{-}{o}}{\lambda}$;

(e) $pInt\lambda = \lambda \cap Int\overline{\lambda}$ ou $p\overset{\overset{o}{-}}{\lambda}$.

Démonstration: seulement (4). Conf. Lemme 1 (2) nous avons:

$$\overline{Int(\lambda \cup \overline{Int\lambda})} \leq \overline{Int\lambda \cup \overline{Int\lambda}} = \overline{Int\lambda} \cup \overline{\overline{Int\lambda}} = \overline{Int\lambda} \leq \lambda \cup \overline{Int\lambda}.$$

Donc $\lambda \cup \overline{Int\lambda}$ est préfermé (Conf. Déf. 8(&)([4]) et d'ici résulte que $pC\ell\lambda \leq \lambda \cup \overline{Int\lambda}(1)$. D'autre part, parce que $pC\ell\lambda$ est préfermé, nous avons $\overline{Int\lambda} \leq \overline{Int(pC\ell\lambda)} \leq pC\ell\lambda$ et donc $\lambda \cup \overline{Int\lambda} \leq pC\ell\lambda(2)$. De (1) et (2) il s'en suit que $pC\ell\lambda = \lambda \cup \overline{Int\lambda}$.

Ensembles demi-préouverts

Nous introduisons ici la notion d'ensemble demi-préouvert par la

Définition 8. Soit (X,τ) e.t.f. L'ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ s'appelle demi-préouvert en (X,τ) ainsi que $\mu \leq \lambda \leq \overline{\mu}$. La complémentaire d'un ensemble demi- préouvert s'appelle ensemble demi-préfermé.

Définition 9 (équivalente). L-ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ s'appelle demi- préfermé s'il y a ν préfermé en (X,τ) ainsi que $Int\,\nu \leq \lambda \leq \nu$. La complémentaire d'un ensemble demi- préfermé s'appelle demi- préouvert. Nous avons le théorème suivant de caractérisation pour les ensembles demi- préouverts.

Théorème 6. Soit (X,τ) e.t.f. et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$. Alors, les affirmations suivantes sont equivalentes:

(a) λ est demi- préouvert;

(b) $\lambda \leq \overline{Int\overline{\lambda}}$;

(c) $\overline{\lambda}$ est régulièrement fermé en X.

Démonstration. $(a) \Rightarrow (b)$**.** Soit λ demi-préouvert, donc il y a $\mu \in \mathcal{F}(X)$, préouvert ainsi que $\mu \leq \lambda \leq \overline{\mu}$. D'ici il résulte que $\overline{\lambda} = \overline{\mu}$ et donc $\overline{Int\overline{\lambda}} = \overline{Int\overline{\mu}}$. Comme μ est préouvert nous avons $\mu \leq Int\overline{\mu}$ (Déf. 5) et donc $\lambda \leq \overline{\mu} \leq \overline{Int\overline{\mu}} = \overline{\text{int}\,\overline{\lambda}}$.

$(2) \Rightarrow (3)$.Conf.(b) $\lambda \leq \overline{Int\overline{\lambda}}$, donc $\overline{\lambda} = \overline{Int\overline{\lambda}}$, qui signifie que λ est régulièrement fermé en X.

$(3) \Rightarrow (1)$Nous supposons que $\overline{\lambda} = \overline{Int\overline{\lambda}}$; soit $\mu = \lambda \cap Int\overline{\lambda}$ qui est préouvert conf. Th. 5 (5). Nous avons donc $Int\overline{\lambda} = \overline{\lambda} \cap Int\overline{\lambda} \leq \overline{\lambda \cap Int\overline{\lambda}} = \overline{\mu}$ (Conf. Lemme 1 (1)). D'ici résulte que $\lambda \leq \overline{\lambda} = \overline{Int\overline{\lambda}} \leq \overline{\mu}$, donc λ est un ensemble demi- préouvert.

Théorème 7. Soit (X,τ) e.t.f. et $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ une famille d'ensembles demi- préouverts en (X,τ). Alors $\bigcup_{i\in I}\lambda_i$ est un ensemble demi- préouvert.

Démonstration. $\bigcup_{i\in I}\lambda_i \subset \bigcup_{i\in I}\overline{\overline{Int\lambda_i}} \subset \overline{\bigcup_{i\in I}\overline{Int\lambda_i}} \subset \overline{Int\left(\bigcup_{i\in I}\overline{\lambda_i}\right)} \subset \overline{Int\overline{\bigcup_{i\in I}\lambda_i}}$ et donc $\bigcup_{i\in I}\lambda_i$ est demi-préouvert.

Les deux théorèmes suivants sont le double des théorèmes 6 et 7 et nous les donnons sans démonstration.

Théorème 8. Soit (X,τ) e.t.f. et $\lambda\in\mathcal{F}(X)$. Les affirmations suivantes sont equivalentes:

(a) λ este un ensemble demi-préfermé en (X,τ)

(b) $Int(\overline{Int\lambda})\le\lambda$;

(c) $Int\lambda$ est un ensemble régulièrement ouvert

Théorème 9. Soit (X,τ) e.t.f. et $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ une famille d'ensembles demi- préfermés. Alors $\bigcap_{i\in I}\lambda_i$ est demi- préfermé. Nous introduisons ici les notions de demi- préfermeture resp. de demi-préintérieur par les définitions suivantes:

Définition 10. L'intersection de tous les ensembles demi- préfermés contenant l'ensemble $\lambda\in\mathcal{F}(X)$, où (X,τ) est e.t.f. s'appelle la demi- préfermeture de λ et on va la noter par $dpC\ell\lambda$ ou $dp\overline{\lambda}$

Remarque 2. Du Th.9 résulte que $dp\overline{\lambda}$ est un ensemble demi- préfermé.

Définition 11. La réunion de tous les ensembles qui sont sous-ensembles de $\lambda\in\mathcal{F}(X)$s'appelle le demi-préinterieur de λ et on va le noter par $dpInt\lambda$ ou $dp\overset{o}{\lambda}$.

Remarque 3. Du Th.7 résulte que $dpInt\lambda$ est un ensemble demi- préouvert.

Pour ces notions nous avons les théorèmes suivants:

Théorème 10. Soit (X,τ) e.t.f. et $\lambda\in\mathcal{F}(X)$.

Alors $dp\overline{\lambda}=\lambda\cup Int(\overline{Int\lambda})$.

Démonstration. Nous avons successivement

$$Int\left(\overline{Int\left(\lambda\cup Int\left(\overline{Int\lambda}\right)\right)}\right)\le Int\left(\overline{Int\left(\lambda\cup\overline{Int\lambda}\right)}\right)\le Int\left(\overline{Int\lambda\cup\overline{Int\lambda}}\right)=Int\left(\overline{Int\lambda}\right)\le\lambda\cup Int\left(\overline{Int\lambda}\right)$$

Donc $\lambda\cup Int(\overline{Int\lambda})$ est un ensemble demi- préouvert et donc $dp\overline{\lambda}\le\lambda\cup Int(\overline{Int\lambda})$(1). D'autre part, parce que $dp\overline{\lambda}$ est demi- préouvert, il résulte que $Int(\overline{Int\lambda})\le Int\left(\overline{Int(dp\overline{\lambda})}\le dp\overline{\lambda}\right)$ d'où $\lambda\cup Int(\overline{Int\lambda})\le dp\overline{\lambda}$ (2). De (1) et (2) il résulte que

$$dp\overline{\lambda}=\lambda\cup Int(\overline{Int\lambda})$$

Théorème 11. Soit (X,τ) e.t.f. et $\lambda\in\mathcal{F}(X)$.

Alors $dpInt\lambda=\lambda\cap\overline{Int\overline{\lambda}}$.

Démonstration. Nous avons successivement

$$\lambda \cap \overline{Int\overline{\lambda}} \le \overline{Int\overline{\lambda}} = \overline{Int(\overline{\lambda} \cap Int\overline{\lambda})} \le \overline{Int(\overline{\lambda \cap Int\overline{\lambda}}} \le$$

$\le \overline{Int(\lambda \cap \overline{\overline{Int\overline{\lambda}}})}$ et donc $\lambda \cap \overline{Int\overline{\lambda}}$ est un ensemble demi-préouvert en X et d'ici

$$\lambda \cap \overline{Int\overline{\lambda}} \le dpInt\lambda \qquad (1)$$

D'autre part, parce que $dpInt\lambda$ est un ensemble demi- préouvert nous avons

$$dpInt\lambda \le \overline{Int\left(\overline{dpInt\lambda}\right)} \le \overline{Int\overline{\lambda}}$$

et donc

$$dpInt\lambda \le \lambda \cap \overline{Int\overline{\lambda}} \qquad (2)$$

De (1) et (2) il résulte que $dpInt\lambda \le \lambda \cap \overline{Int\overline{\lambda}}$.

Corollaire 1. Pour $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ sont valables les affirmations suivantes:

(a) $dpInt(1-\lambda) = 1 - dp\overline{\lambda}$

(b) $dp\overline{(1-\lambda)} = 1 - dpInt\lambda$.

Théorème 12. Soit (X,τ) e.t.f. et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$. Si λ est un ensemble demi- préouvert (resp. demi-préfermé) et demi-fermé (resp. demi-ouvert) alor λ est demi-ouvert (resp. demi-fermé).

Démonstration. Nous supposons que λ est un ensemble demi- préouvert et demi- fermé. Alors $\lambda \le \overline{Int\overline{\lambda}}$ et $Int\overline{\lambda} = Int\lambda$ d'où $\lambda \le \overline{Int\overline{\lambda}}$ et donc λ est un ensemble demi-ouvert en X.

La démonstration est similaire pour la deuxième partie.

Propriétés remarquables des opérateurs de demi-intérieur et de demi-fermeture

Nous allons présenter ici quelques propriétes remarquables pour ces opérateurs introduits par nous dans le travail [3].

Théorème 13. Soit (X,τ) e.t.f. et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$. Alors

$$dInt(dC\ell\lambda) = dC\ell\lambda \cap \overline{Int\overline{\lambda}}\ .$$

Démonstration. Conf.du Th. 5 nous avons successivement

$$dInt(dC\ell\lambda) = dC\ell\lambda \cap \overline{Int(dC\ell\lambda)} = dC\ell\lambda \cap \overline{Int\left(\lambda \cup Int\overline{\lambda}\right)} \ge$$

$$\ge dC\ell\lambda \cap \overline{Int\lambda \cup Int\overline{\lambda}} = dC\ell\lambda \cap \overline{Int\overline{\lambda}}.$$

L'inclusion réciproque est établie par

$$dInt(dC\ell\lambda) = dC\ell\lambda \cap \overline{Int(dC\ell\lambda)} \le dC\ell\lambda \cap \overline{Int\overline{\lambda}}\ .$$

Corollaire 2. Soit (X,τ) e.t.f. et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$. Alors:

(a) $dInt\lambda(dC\ell\lambda)$ est demi-préfermé et

(b) $dC\ell(dInt(dC\ell\lambda)) = dInt(dC\ell\lambda)$.

Théorème 14. Soit $\lambda \in \mathcal{F}(X)$, où (X,τ) est un e.t.f.

Alors $dC\ell(dInt\lambda) = dInt\lambda \cup Int\overline{(Int\lambda)}$.

Démonstration. Conf. du Th. 5 nous avons successivement

$$dC\ell(dInt\lambda) = dInt\lambda \cup Int\overline{(Int\lambda)} = dInt\lambda \cup Int\overline{(\lambda \cap \overline{Int\lambda})} \leq$$

$$\leq dInt\lambda \cup Int(\overline{\lambda} \cap \overline{Int\lambda}) = dInt\lambda \cup Int\overline{(Int\lambda)}.$$

L'inclusion réciproque est établie par $dC\ell(dInt\lambda) = dInt\lambda \cup Int\overline{(Int\lambda)} \geq dInt\lambda \cup Int\overline{(Int\lambda)}$.

Corollaire 3. Pour $\lambda \in \mathcal{F}(X)$, où (X,τ) est un e.t.f. nous avons:

(a) $dC\ell(dInt\lambda)$ et demi- préfermé et

(b) $dInt(dC\ell(dInt\lambda)) = dC\ell(dInt\lambda)$.

Corollaire 4. Pour $\lambda \in \mathcal{F}(X)$, où (X,τ) est un e.t.f. nous avons:

(a) $\lambda \cup dInt(dC\ell\lambda) = dC\ell\lambda$;

(b) $\lambda \cup dC\ell(dInt\lambda) = dpC\ell\lambda$;

(c) $\lambda \cap dInt(dC\ell\lambda) = dpInt\lambda$;

(d) $\lambda \cap dC\ell(dInt\lambda) = dInt\lambda$.

Théorème 15. Soit (X,τ) est un e.t.f. $\lambda \in \mathcal{F}(X)$. Alors:

(a) $pC\ell(pInt\lambda) = pInt\lambda \cup \overline{Int\lambda}$;

(b) $pInt(pC\ell\lambda) = pC\ell\lambda \cap Int\overline{\lambda}$.

Démonstration. Par exemple, pour (a), appliquant Th. 5 il résulte que

$$pC\ell(pInt\lambda) = pInt\lambda \cup \overline{Int(pInt\lambda)} = pInt\lambda \cup \overline{Int\lambda}.$$

Utilisant le Th. 5 et puis Lemme 1 on démontre immédiatement les deux théorèmes suivants:

Théorème 16. Soit (X,τ) e.t.f. et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$.

Alors:

(a) λ est préouvert si $dC\ell\lambda = Int\overline{\lambda}$;

(b) λ est demi-ouvert si $pC\ell\lambda = \overline{Int\lambda}$;

(c) λ est préfermé si $dInt\lambda = \overline{Int\lambda}$;

(d) λ est demi-fermé si $pInt\lambda = \overline{Int\lambda}$.

Théorème 17. Dans un e.t.f. (X,τ) pour $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ nous avons:

(a) $Int(sC\ell\lambda) = pInt\overline{\lambda} = Int\overline{\lambda}$;

(b) $\overline{dInt\lambda} = pC\ell(\text{int}\,\lambda) = \overline{Int\lambda}$;

(c) $dInt\overline{\lambda} = \overline{pInt\lambda} = \overline{Int\overline{\lambda}}$;

(d) $dC\ell(Int\lambda) = Int(pC\ell\lambda) = Int\overline{(Int\lambda)}$.

Théoréme 18. Soit $\lambda \in (X,\tau)$ e.t.f. Alors:

(a) $dInt(pC\ell\lambda) = pC\ell(dInt\lambda)$;

(b) $pInt(dC\ell\lambda) = dC\ell(pInt\lambda) = Int\overline{\lambda}$.

Démonstration. 1. On applique le Th.16(2). Nous avons immédiatement

$$pC\ell(dInt\lambda) = \overline{Int(dInt\lambda)} = \overline{Int\lambda}.$$

D'autre part, Conf. Th.16 (3) et Th.17 (4) il résulte que

$$dInt(pC\ell\lambda) = \overline{Int(pC\ell\lambda)} = \overline{Int\left(\overline{Int\lambda}\right)} = \overline{\overline{Int\lambda}}.$$

L'affirmation 2 sera démontrée d'une façon similaire.

Le théorème suivant sera démontré conformément aux Th.17 et Th.18.

Théorème 19. Soit (X,τ) e.t.f. et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$. Alors:

(a) $Int(dpC\ell\lambda) = dpC\ell(Int\lambda) = Int\left(\overline{Int\lambda}\right)$;

(b) $\overline{dpInt\lambda} = dpInt\overline{\lambda} = \overline{Int\overline{\lambda}}$;

(c) $dInt(dpC\ell\lambda) = dpC\ell(dInt\lambda) = dC\ell(dInt\lambda)$;

(d) $dC\ell(dpInt\lambda) = dpInt(dC\ell\lambda) = dInt(dC\ell\lambda)$;

(e) $pInt(dpC\ell\lambda) = dpC\ell(pInt\lambda) = \left(\lambda \cap Int\overline{\lambda}\right) \cup Int\left(\overline{Int\lambda}\right)$;

(f) $pC\ell(dpInt\lambda) = dpInt(pC\ell\lambda) = \left(\lambda \cup \overline{Int\lambda}\right) \cap \overline{Int\overline{\lambda}}$.

Bibliographie

1. Andrijević, D. - Semi-prospen Sets, *Mat. Vesnik*, 38, p. 24-32, 1986
2. Azad, K.K. - Fuzzy semicontinuity, Fuzzy Almost continuity and Fuzzy Weakly Continuity, *Journal of Math. Anal. Appl*. 82, p. 14-32, 1981
3. Brescan, M. - Espaces topologiques flous demi-T2, *Studii şi cercetări ştiinţifice*, Universitatea din Bacău, *Seria: Matematică*, Nr.6 , p. 55-72, 1996
4. Brescan, M. - Sur quelques propriétés prétopologiques dans les espaces topologiques flous, *Buletinul Universităţii Petrol-Gaze din Ploieşti, Seria Matematică, informatică, fizică*, nr.1/2000, p. 67-71, 2000
5. Chang, C.L. - Fuzzy Topological Spaces, *Journal Math. Anal. Appl.* 43, p. 734-742, 1973

Mulţimi semi-predeschise în spaţii topologice fuzzy

Rezumat

În această lucrare se generalizează pentru spaţii topologice fuzzy conceptul de mulţime semi-predeschisă, introdus în topologia clasică de D. Andrijevic. Definim aici operatorii fuzzy de semi-preînchidere şi semi-preinterior şi apoi stabilim relaţii importante ale acestora cu operatorii de F-semi-inchidere şi F-semi-interior introduşi de noi în lucrarea [3].